Topologie et Calcul Différentiel
L3 MASS 31U1CD35
Examen du 12 Janvier 2012

Durée: 3h00. Le barême indiqué ci-dessous peut faire l'objet d'évolutions.

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Tout calcul ou résultat (hors exercice 1) doit être rigoureusement justifié. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 (Questions de cours, 4 points, pas de démonstration exigée)

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Donner l'expression de sa matrice jacobienne $J(f)(x)$, en un point x de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, de classe C^2, $x \in \mathbb{R}^n$. Exprimer $d^2 f_{|x}(h, h)$ en fonction de la matrice hessienne $H(f)(x)$ et du vecteur $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ des coordonnées de h dans la base canonique.
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1, x_0 un point de $\mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire d'ordre 1 pour que x_0 soit un point d'extremum local de f.
4. Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1, x_0 un point critique de f. Donner une condition suffisante sur f pour que x_0 soit un point de minimum global de f.

Exercice 2 (5 points)

1. Soit $A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ linéaire, donnée matriciellement dans la base canonique par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Jusqu'à la fin de l'exercice, $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$. Montrer que $\|A^{-1}\|$ vaut exactement 6, où $\| \ \|$ est la norme subordonnée à $\| \ \|_\infty$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{8}, \frac{\cos^2(x_2)}{7}\right)$. Montrer que φ est de classe C^1, et que $\|d\varphi_{|x}\| \leq \frac{1}{7}$, pour tout x dans $\mathbb{R}^2$. *Rappel:* $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.
4. En déduire que φ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.

5. Montrer que l'application $A + \varphi$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (6 points)

Soit $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par $\mathcal{E} = \{x,\ 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 = 10\}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

1. Montrer soigneusement que $\mathcal{E}$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que f admet un maximum global sur $\mathcal{E}$.
3. En utilisant le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange, montrer que tout point d'extremum de f sur $\mathcal{E}$ est de la forme $x = (x_1, 0, 0)$ ou $x = (0, x_2, 0)$, ou $x = (0, 0, x_3)$.
4. En déduire le ou les points de maximum global de f sur $\mathcal{E}$, et la valeur de ce maximum.
5. On considère cette fois $\mathcal{F} = \{x,\ 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 \leq 10\}$. Montrer que f admet un maximum global sur $\mathcal{F}$.
6. Déterminer le ou les points de maximum global de f sur $\mathcal{F}$, et la valeur de ce maximum.

Exercice 4 (5 points)

Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel norm E et $f : K \to K$ une application telle que pour tout $(x, y) \in K \times K$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

Le but de cet exercice est de montrer que f admet au moins un point fixe dans K. On fixe $a \in K$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$ pour tout $x \in K$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bien définie de K vers K.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une application contractante sur K.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in K$ tel que $f_n(x_n) = x_n$.
4. Justifier l'existence d'une suite strictement croissante $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ et de $x \in K$ tels que $x_{\varphi(n)} \to x$ lorsque n tend vers l'infini.
5. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = f(x)$.
6. Conclure.